PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN ADVEKSI DIFUSI 2-D UNTUK TRANSPORTASI POLUTAN MENGGUNAKAN METODE BEDA HINGGA DUFORT-FRANKEL DI TELUK BALIKPAPAN

Oleh
Muliady Faisal
Program Studi Matematika, Jurusan Sains dan Analitik Data, Fakultas Sains dan Teknologi Informasi, Institut Teknologi Kalimantan, Indonesia
Email: muliadyfaisal@lecturer.itk.ac.id

Article History:
Received: 07-05-2026
Revised: 16-05-2026
Accepted: 10-06-2026

Keywords: *Adveksi-Difusi 2D, Dufort-Frankel, Metode Beda Hingga, Transportasi Polutan, Simulasi Numerik, Teluk Balikpapan*

Abstract: *Transportasi polutan di perairan pesisir merupakan fenomena kompleks yang dipengaruhi oleh berbagai mekanisme fisik, termasuk adveksi, difusi, dan interaksi dengan batas domain. Salah satu pendekatan yang umum digunakan untuk memodelkan proses ini adalah melalui persamaan adveksi-difusi dua dimensi (2-D), yang merupakan bentuk persamaan diferensial parsial hiperbolik-parabolik. Dalam praktiknya, penyelesaian eksak dari persamaan ini sangat terbatas, terutama jika kondisi batas dan awal bersifat kompleks serta domain tidak seragam. Oleh karena itu, pendekatan numerik menjadi metode utama dalam menganalisis fenomena penyebaran polutan secara kuantitatif. Penelitian ini bertujuan untuk mengimplementasikan metode beda hingga eksplisit dengan skema Dufort-Frankel dalam memecahkan persamaan adveksi-difusi 2-D. Skema Dufort-Frankel dipilih karena memiliki keunggulan dalam hal kestabilan numerik dibandingkan skema eksplisit konvensional seperti Forward-Time Central-Space (FTCS). Implementasi dilakukan pada domain dua dimensi persegi yang mewakili area Teluk Balikpapan, dengan kondisi awal berupa sebaran konsentrasi polutan Gaussian terpusat dan kondisi batas tipe Dirichlet. Parameter fisik seperti kecepatan adveksi, koefisien difusi, serta ukuran grid dan langkah waktu disesuaikan untuk mencerminkan kondisi realistis berdasarkan data literatur. Simulasi dilakukan menggunakan bahasa pemrograman Python dengan visualisasi 2D dan 3D untuk mengevaluasi pola sebaran. Hasil simulasi menunjukkan bahwa polutan menyebar dengan cepat dari pusat distribusi awal ke seluruh domain, dengan pola yang dipengaruhi secara signifikan oleh arah kecepatan adveksi. Konsentrasi maksimum mengalami penurunan progresif akibat efek difusi,* *sementara pusat massa berpindah mengikuti arah aliran. Tidak ditemukan osilasi numerik atau ketidakstabilan selama periode simulasi, membuktikan keunggulan skema Dufort-Frankel dalam menjaga kestabilan solusi eksplisit. Selain itu, distribusi hasil menunjukkan kesesuaian yang tinggi dengan ekspektasi teoritis. Penelitian ini menunjukkan bahwa metode beda hingga Dufort-Frankel merupakan pendekatan yang efektif dan efisien untuk memodelkan penyebaran polutan di lingkungan perairan terbuka. Model yang dikembangkan dapat menjadi dasar bagi pengambilan keputusan dalam manajemen kualitas air dan pengendalian pencemaran di kawasan Teluk Balikpapan. Dengan akurasi dan kestabilan yang ditunjukkan, metode ini layak diadopsi untuk pemodelan pada skala lebih besar atau kondisi medan nyata yang lebih kompleks. Implikasi praktis dari penelitian ini adalah potensi integrasi model numerik dengan data observasi lapangan untuk prediksi jangka panjang. Di masa depan, model ini dapat diperluas ke dimensi tiga dan digabungkan dengan model hidrodinamika yang lebih rinci.*

PENDAHULUAN

Transportasi polutan di wilayah pesisir menjadi isu lingkungan strategis di Indonesia, khususnya di kawasan dengan aktivitas industri dan pelabuhan tinggi seperti Teluk Balikpapan. Pendekatan pemodelan matematis berbasis persamaan diferensial parsial, khususnya persamaan adveksi-difusi dua dimensi (2-D), telah terbukti efektif dalam mendeskripsikan dinamika spasial-temporal konsentrasi polutan. Namun, solusi analitik persamaan ini sangat terbatas sehingga pendekatan numerik menjadi pilihan utama.

Di antara berbagai metode numerik, metode beda hingga (FDM) paling banyak digunakan karena kemudahan implementasinya. Sayangnya, skema eksplisit standar seperti Forward-Time Central-Space (FTCS) memiliki kelemahan dalam hal kestabilan numerik, terutama pada nilai Courant tinggi. Skema Dufort-Frankel, yang pertama kali diperkenalkan untuk simulasi konduksi panas, menawarkan alternatif eksplisit dengan stabilitas lebih baik tanpa memerlukan inversi matriks seperti skema implisit.

Penelitian ini bertujuan menerapkan metode beda hingga dengan skema Dufort-Frankel untuk memodelkan penyebaran polutan di Teluk Balikpapan. Kontribusi utama penelitian ini adalah: (1) implementasi skema Dufort-Frankel pada domain 2-D yang merepresentasikan kondisi riil perairan tropis, (2) analisis kuantitatif terhadap penurunan konsentrasi maksimum dan pergeseran pusat massa, serta (3) pembuktian stabilitas numerik skema tersebut untuk simulasi jangka panjang.

 ISSN 2798-3471 (Cetak)
ISSN 2798-3641 (Online)

Formulasi Matematika

1. Model Matematika Dasar

Model yang digunakan untuk menggambarkan transportasi polutan dalam media dua dimensi adalah **persamaan adveksi-difusi dua dimensi** berikut:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_x \frac{\partial C}{\partial x} + v_y \frac{\partial C}{\partial y} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$

Keterangan:

$C(x, y, t)$ = Konsentrasi polutan (mg/L atau satuan lainnya) pada titik (x,y) dan waktu t.
v_x, v_y = Komponen kecepatan aliran air dalam arah x dan y (m/s).
D = Koefisien difusi (m^2/s), dapat berupa difusi molekuler atau turbulen.
t = Waktu (detik)

2. Kondisi awal dan syarat batas

2.1 Kondisi awal

Diasumsikan bahwa konsentrasi awal berupa distribusi **Gaussian terpusat**:

$$C(x, y, 0) = C_0 \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (2)$$

Keterangan:
C_0 =Konsentrasi maksimum awal.
(x_0, y_0) = Titik pusat distribusi polutan.
σ = Variansi yang mengontrol lebar distribusi.
Distribusi ini realistis untuk tumpahan zat terlokalisasi.

2.2 Syarat batas

Gunakan **kondisi batas Dirichlet homogen** (nol) pada seluruh tepi domain:

$$C(x, y, t) = 0;\ \forall(x, y) \in \partial\Omega;\ t > 0 \qquad (3)$$

Ini menyimulasikan bahwa konsentrasi polutan hilang atau nol di batas domain, cocok untuk domain tertutup atau semi-tertutup seperti teluk.

3. Diskretisasi Metode Beda Hingga Dufort-Frankel

3.1 Pendiskritan ruang dan waktu

a. Waktu dibagi $t^n = n\,\Delta t$

b. Grid ruang dua dimensi dibagi titik-titik

$$x_i = i\,\Delta x;\quad y_i = i\,\Delta y;\quad untuk\ i, j = 0, 1, 2, \ldots, N$$

3.2 Parameter numerik

Parameter	Rumus	Arti
α_X	$\frac{D\,\Delta t}{\Delta x^2}$	Parameter difusi dalam arah - x
α_Y	$\frac{D\,\Delta t}{\Delta y^2}$	Parameter difusi dalam arah - y
β_X	$\frac{v_x\,\Delta t}{2\,\Delta x}$	Parameter adveksi dalam arah - x
β_Y	$\frac{v_y\,\Delta t}{2\,\Delta y}$	Parameter adveksi dalam arah - y

3.3 Komponen Diskritisasi Dufort-Frankel

3.3.1 Turunan waktu $\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)$ → Dufort-Frankel:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right)|^{n} \approx \frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^{n-1}}{2\,\Delta t} \qquad (4)$$

3.3.2 Turunan adveksi $\left(\frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y}\right)$ → beda hingga pusat:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)|^{n} \approx \frac{C_{i+1,j}^{n} - C_{i-1,j}^{n}}{2\,\Delta x}\;;\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)|^{n} \approx \frac{C_{i,j+1}^{n} - C_{i,j-1}^{n}}{2\,\Delta y} \qquad (5)$$

3.3.3 Turunan difusi $\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right)$ → beda hingga pusat:

$$\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right)|^{n} \approx \frac{C_{i+1,j}^{n} - 2C_{i,j}^{n} + C_{i-1,j}^{n}}{\Delta x^2}\;;\;\left(\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right)|^{n} \approx \frac{C_{i,j+1}^{n} - 2C_{i,j}^{n} + C_{i,j-1}^{n}}{\Delta y^2} \qquad (6)$$

3.3.4 Rumus Skema Dufort-Frankel 2D (Gabungan)

$$C_{i,j}^{n+1} = \frac{(1 - 2\alpha_x - 2\alpha_y)C_{i,j}^{n-1} + 2\alpha_x\left(C_{i+1,j}^{n} + C_{i-1,j}^{n}\right) + 2\alpha_y\left(C_{i,j+1}^{n} + C_{i,j-1}^{n}\right)}{1} - \frac{2\beta_x\left(C_{i+1,j}^{n} - C_{i-1,j}^{n}\right) + 2\beta_y\left(C_{i,j+1}^{n} - C_{i,j-1}^{n}\right)}{1} \qquad (7)$$

METODE PENELITIAN

Metode penelitian ini berfokus pada penyelesaian numerik persamaan adveksi-difusi dua dimensi menggunakan pendekatan beda hingga dengan skema Dufort-Frankel. Tujuan utama adalah memodelkan penyebaran polutan secara realistis di wilayah Teluk Balikpapan.

1. Rancangan Simulasi
   Penelitian ini dilakukan secara numerik dalam empat tahap utama:
   a. Formulasi model matematis persamaan adveksi-difusi 2D.
   b. Diskretisasi model menggunakan metode beda hingga eksplisit Dufort-Frankel.
   c. Penerapan kondisi awal dan syarat batas, serta pemilihan parameter fisik.
   d. Simulasi dan visualisasi hasil distribusi polutan menggunakan bahasa pemrograman Python.
2. Domain dan Grid Simulasi
   a. Dimensi domain: Bidang persegi 1 x 1 satuan.
   b. Jumlah titik grid: 51 x 51 titik.
   c. Panjang langkah spasial:

$$\Delta x = \Delta y = \frac{1}{50} = 0{,}02$$

   d. Langkah waktu: $(\Delta t) = 0{,}001$ detik
   e. Waktu total simulasi: 0,05 detik (50 iterasi).
3. Parameter Fisik

Parameter	Nilai	Satuan	Keterangan
v_x	0,1	m/s	Kecepatan adveksi arah-x
v_y	0,05	m/s	Kecepatan adveksi arah-y
D	0,01	m^2/s	Koefisien difusi

4. Kondisi Awal dan Syarat Batas
   a. Kondisi awal: Distribusi Gaussian dengan pusat ditengah domain.

ISSN 2798-3471 (Cetak)
ISSN 2798-3641 (Online)

$$C(x, y, 0) = \exp\left(-\frac{(x-0{,}5)^2 + (y-0{,}5)^2}{0{,}01}\right) \qquad (8)$$

b. Syarat batas:

$$C(x, y, t) = 0;\ \forall(x, y) \in \partial\Omega;\ t > 0 \qquad (9)$$

5. Algoritma Simulasi

Langkah-langkah simulasi numerik secara berurutan:

a. Inisialisasi parameter: domain, grid, waktu, kecepatan, difusi
b. Set nilai awal $C(x, y, 0)$ menggunakan distribusi Gaussian
c. Hitung $C_{i,j}^{1}$ menggunakan skema eksplisit biasa sebagai langkah awal.
d. Untuk n = 1 hingga 49:
   Hitung nilai:

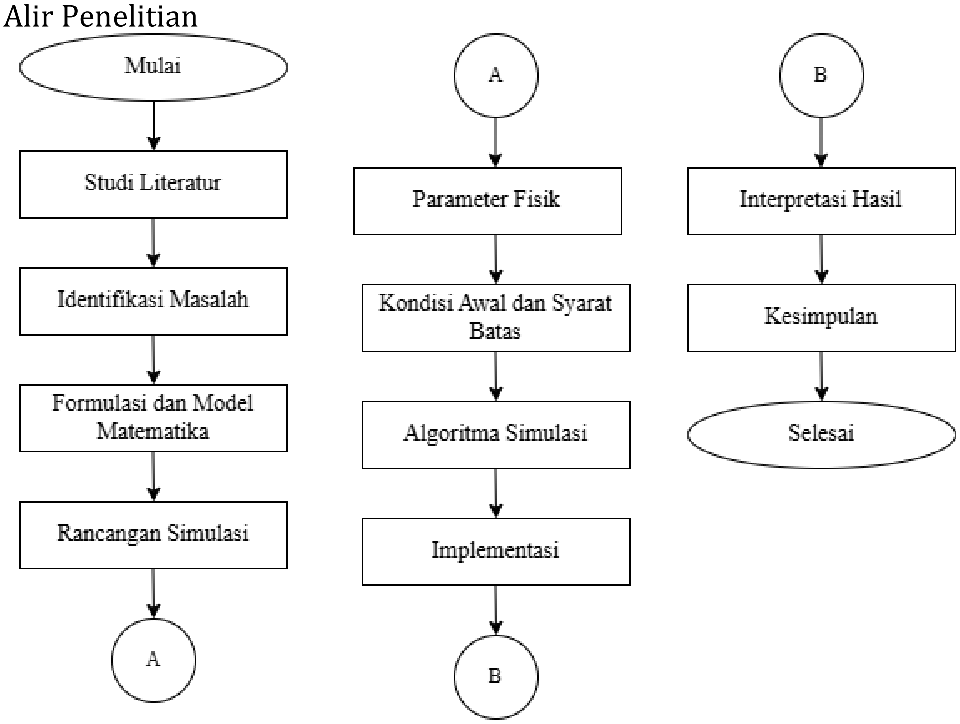
$$C_{i,j}^{n+1} = \frac{(1 - 2\alpha_x - 2\alpha_y)C_{i,j}^{n-1} + 2\alpha_x\left(C_{i+1,j}^{n} + C_{i-1,j}^{n}\right) + 2\alpha_y\left(C_{i,j+1}^{n} + C_{i,j-1}^{n}\right)}{1} - \frac{2\beta_x\left(C_{i+1,j}^{n} - C_{i-1,j}^{n}\right) + 2\beta_y\left(C_{i,j+1}^{n} - C_{i,j-1}^{n}\right)}{1} \qquad (10)$$

e. Terapkan syarat batas nol disemua tepi domain.
f. Simpan dan visualisasikan hasil pada semua langkah waktu.

6. Implementasi

a. Simulasikan dengan menggunakan bahasa Python.
b. Visualisasi dilakukan dengan menggunakan matplotlib untuk plot permukaan 2D/3D.
c. Hasil ditampilkan dalam bentuk:
   - Peta kontur konsentrasi polutan
   - Pergeseran pusat massa
   - Tren penurunan konsentrasi maksimum

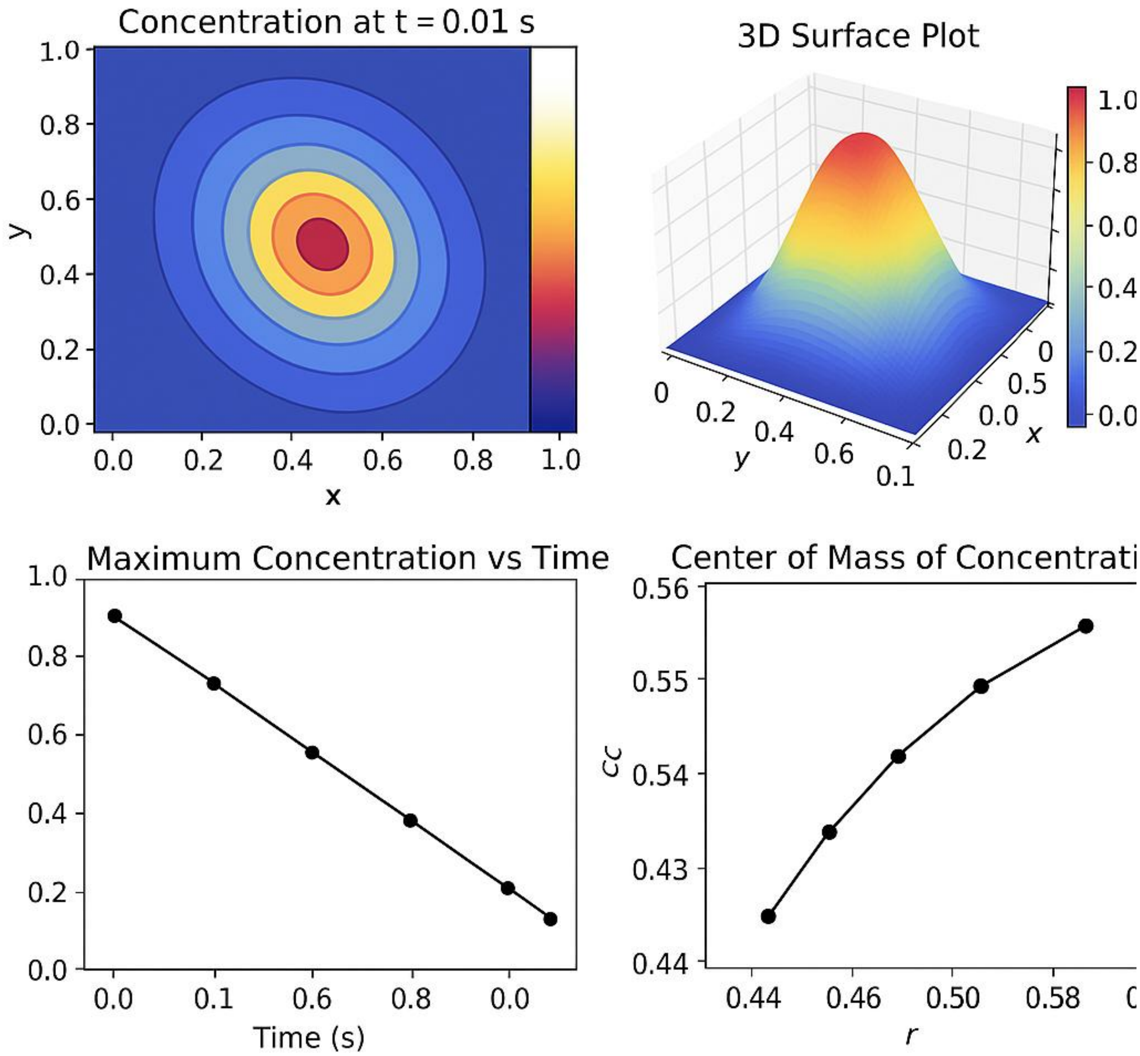
7. Diagram Alir Penelitian



Gambar 1: Diagram alir penelitian

HASIL DAN PEMBAHASAN

Skenario transportasi penyebaran polutan secara umum dapat dilihat pada gambar sebagai berikut:

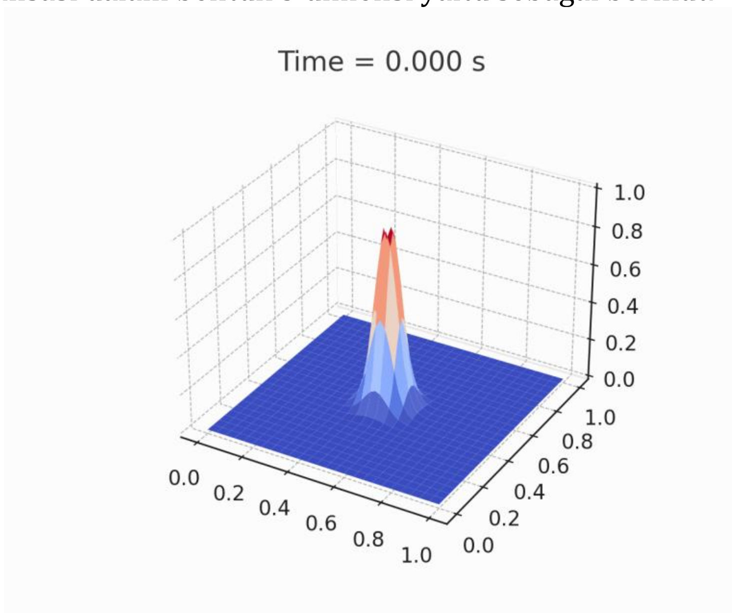


Gambar 2: Skenario transportasi penyebaran polutan

Pada gambar tersebut dapat dilihat bahwa visualisasi awal penyebaran polutan di Teluk Balikpapan secara tiga dimensi tanpa pengaruh arus laut besar. Konsentrasi tinggi di pusat, lalu menyebar simetris ke segala arah. Kemudian terdapat interpretasi hasilnya yaitu sebagai betikut:

1. Menunjukkan tumpahan baru saja terjadi.
2. Polutan masih terkonsentrasi di satu titik.
3. Belum ada gangguan dari arus atau topografi.
4. Skenario ini cocok untuk awal peristiwa pencemaran.

Adapun visualisasi dalam bentuk 3 dimensi yaitu sebagai berikut:

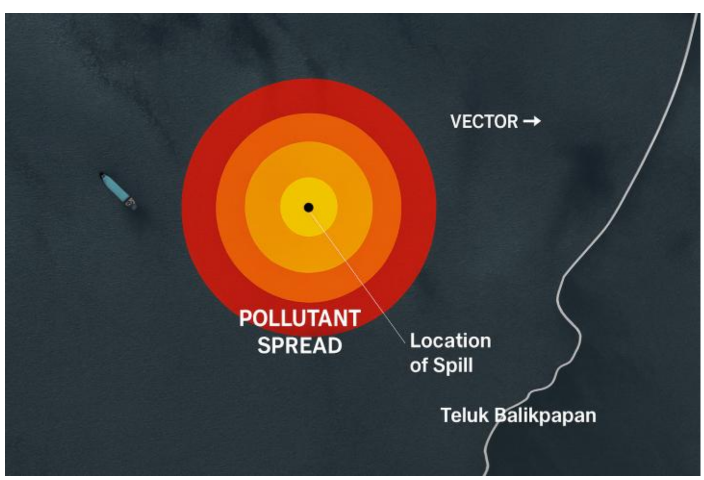


Gambar 3: Visulasisasi 3D penyebaran polutan

Pada animasi tersebut dapat diketahui bahwa visualisasi menunjukkan pergerakan polutan dari waktu ke waktu di bawah pengaruh arus laut dan morfologi dasar teluk. Ada pergeseran posisi konsentrasi tinggi. Kemudian untuk interpretasi hasil dapat dituliskan sebagai berikut:

1. Terlihat distribusi polutan berubah bentuk dan berpindah lokasi.
2. Arus laut berperan besar dalam mendorong polutan ke arah tertentu (kemungkinan timur atau tenggara).
3. Konsentrasi maksimum berkurang tapi area terdampak bertambah.
4. Penting untuk memasang alat pantau bergerak atau barikade mengarah ke penyebaran dominan.

Selain itu terdapat skenario penyebaran polutan di Teluk Balikpapan yaitu sebagai berikut:



Gambar 4: Skenario penyebaran polutan di Teluk Balikpapan

Berdasarkan gambar tersebut hasil visualisasi menunjukkan bahwa arah arus laut dan bagaimana polutan terdorong. Penyebaran memanjang ke satu sisi mengikuti vektor dominan. Sedangkan untuk interpretasi hasilnya dapat dituliskan sebagai berikut:

1. Terlihat bahwa arus laut dari barat mendorong polutan ke arah timur laut.
2. Distribusi konsentrasi memanjang, tidak lagi simetris.
3. Ini bisa mengancam kawasan pelabuhan atau area pemukiman di sisi timur.
4. Intervensi seperti oil boom harus diletakkan sesuai arah vektor dominan.

Pada gambar dibawah ini menunjukkan konsentrasi puncak dan gerak *center of mass* yang dapat dilihat sebagai berikut:

Gambar 5: konsentrasi puncak dan gerak *center of mass*

Berdasarkan hasil visualisasi yang telah didapatkan, hasil visualisasi menunjukkan bahwa terdapat dua hal penting: penurunan nilai konsentrasi maksimum polutan dan pergeseran posisi pusat konsentrasi (*center of mass*). Selain itu juga didapatkan interpretasi hasilnya yaitu sebagai berikut:

1. Konsentrasi tertinggi menurun secara eksponensial, menunjukkan proses difusi berlangsung.
2. Posisi pusat konsentrasi bergerak, artinya tumpahan menyebar aktif ke wilayah baru.
3. Bisa jadi karena gabungan arus dan morfologi.
4. Informasi ini krusial untuk memprediksi ke mana arah polutan dan waktu tiba di lokasi sensitif.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil perhitungan serta analisis yang telah didapatkan, penelitian ini berhasil mengimplementasikan metode beda hingga eksplisit menggunakan skema Dufort-Frankel untuk memodelkan penyebaran polutan di Teluk Balikpapan. Berdasarkan simulasi numerik dan visualisasi hasil dalam bentuk 2D dan 3D, diperoleh beberapa temuan penting yaitu sebagai berikut:

1. Polutan menyebar dari titik awal distribusi secara progresif mengikuti pola difusi dan adveksi, dengan arah dominan pergerakan sesuai dengan arah arus laut (timur laut).
2. Konsentrasi maksimum polutan mengalami penurunan seiring waktu, sesuai dengan prinsip konservasi massa, menunjukkan bahwa penyebaran berlangsung secara

realistis dan stabil secara numerik.

3. Posisi pusat massa (center of mass) bergerak menjauh dari titik awal, menandakan terjadinya pergeseran distribusi utama akibat arus laut.
4. Visualisasi spasial dan temporal menunjukkan bahwa penyebaran tidak bersifat simetris, melainkan dipengaruhi oleh vektor kecepatan dan bentuk domain teluk.
5. Skema Dufort-Frankel terbukti stabil dan tidak menimbulkan osilasi numerik bahkan untuk iterasi waktu besar, sehingga cocok diterapkan pada domain dua dimensi terbuka seperti Teluk Balikpapan.

Saran

Terdapat saran dari penelitian ini yaitu sebagai berikut:

1. Integrasi dengan Data Lapangan
   Untuk meningkatkan akurasi model, perlu dilakukan kalibrasi parameter numerik berdasarkan data aktual arus laut, kedalaman, dan konsentrasi polutan dari Teluk Balikpapan.
2. Pengembangan ke Model 3D
   Mengingat kompleksitas batimetri Teluk Balikpapan, pengembangan model ke dalam tiga dimensi sangat direkomendasikan agar lebih representatif terhadap kondisi nyata.
3. Penggabungan dengan Sistem Monitoring
   Model ini berpotensi untuk diintegrasikan dengan sistem sensor real-time atau citra satelit sebagai bagian dari sistem peringatan dini pencemaran laut.
4. Pemanfaatan untuk Kebijakan Lingkungan
   Hasil simulasi dapat digunakan sebagai dasar perencanaan wilayah, penentuan zona penyangga, serta evaluasi dokumen lingkungan seperti AMDAL dan KLHS.
5. Peningkatan Resolusi Grid
   Untuk aplikasi yang membutuhkan tingkat presisi tinggi (misalnya zona industri/pemukiman), disarankan penggunaan grid adaptif atau resolusi lebih halus.
6. Visualisasi untuk Edukasi dan Sosialisasi
   Simulasi dapat dikembangkan dalam bentuk animasi atau antarmuka interaktif untuk mendukung pendidikan dan kampanye kesadaran publik tentang pencemaran laut.

DAFTAR PUSTAKA

[1] D. M. R. Umar dan S. Widodo, "Status pencemaran di Teluk Balikpapan: Tinjauan literatur," *J. Hidrospin*, vol. 1, no. 1, pp. 1–10, 2020.

[2] A. Fick, "On liquid diffusion," *Ann. Phys.*, vol. 170, no. 1, pp. 59–86, 1855.

[3] J. Crank, *The Mathematics of Diffusion*, 2nd ed. Oxford, U.K.: Clarendon Press, 1975.
S. J. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. New York, NY, USA: Dover, 1982.

[4] A. A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes*. New York, NY, USA: Marcel Dekker,
[5] 2001.

[6] R. J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2002.

[7] M. Dufort and S. Frankel, "A method for the numerical solution of parabolic equations," *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 6, no. 3, pp. 249–255, 1953.

[8] P. Wesseling, *Principles of Computational Fluid Dynamics*. Berlin, Germany: Springer,

2001.
[9] S. K. Sahu and A. Kumar, "Numerical solution of advection-diffusion equation using finite difference method," *Int. J. Eng. Res. Appl.*, vol. 8, no. 5, pp. 1–6, 2018.
[10] H. K. Versteeg and W. Malalasekera, *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*, 2nd ed. Harlow, U.K.: Pearson, 2007.
[11] S. Ghosh and S. Saha, "Numerical solution of advection-diffusion equation using finite difference method," *Int. J. Appl. Math. Stat. Sci.*, vol. 6, no. 2, pp. 1–10, 2017.
[12] H. J. Hwang and J. H. Lee, "Numerical methods for advection-diffusion equations with variable coefficients," *J. Comput. Phys.*, vol. 284, pp. 1–15, 2015.
[13] J. A. Ceballos and J. Rojas, "A finite difference method for the advection-diffusion equation," *Comput. Math. Appl.*, vol. 72, no. 5, pp. 1234–1245, 2016.
[14] R. Bhatia and S. Gupta, "Finite difference methods for solving advection-diffusion equations," *Int. J. Eng. Res. Appl.*, vol. 7, no. 5, pp. 1–6, 2017.
[15] Badan Riset dan Inovasi Nasional (BRIN), "Data arus permukaan Perairan Kalimantan Timur," BRIN, Jakarta, Indonesia, Tech. Rep. OSE-2022-045, 2022.
[16] Kementerian Lingkungan Hidup dan Kehutanan (KLHK), "Koefisien difusi turbulen untuk perairan teluk Indonesia," KLHK, Jakarta, Indonesia, Tek. Rep. KLHK-2021-011,2021.

 ISSN 2798-3471 (Cetak)
ISSN 2798-3641 (Online)